

نظرية الأعداد

- الاستقراء الرياضي
- قابلية القسمة
- الأعداد الأولية
- دالات
- المعادلات الديوفانتية
- تلافيات فيثاغورث
- الدوال العددية العزبية
- بعض الدوال الخاصة
- الجذور الأولية والأولية

الاستقراء الرياضي

لبيان صحة قضية ما (عبارة) P_n (تتعلق بعدد طبيعي n)
نقبع الخطوات (المرتبطة):

1. الخطوة الأساسية

نثبت صحة العبارة عند n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}$)

2. خطوة الاستقراء

نقرنها صحة العبارة عند $n = k$ (مما يدل على جميع الأعداد التي أصغر أو تساوي k)
ونثبت صحة العبارة عند $n = k+1$

عندئذ القضية (العبارة) صحيحة لكل $n \geq n_0$

مثال: أثبت أن:

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad n \geq 1$$

نقبع الاستقراء الرياضي

1. الخطوة الأساسية: عندما $n=1$ نجد الطرف الأيسر يساوي 1.
الطرف الأيمن يساوي $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

عالمية صحيحة من أجل $n=1$

• خطوة الاستقراء: نفرض صحة $n=k$ أي

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

ولتثبت أن

$$(1+2+3+\dots+k+k+1) \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)k + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \dots + (n)^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

نريد:

$$0 \neq x > -1 \quad \text{و} \quad (1+x)^n > 1+nx \quad \text{و} \quad n \geq 2$$

فراصة بنوك

• الخطوة الأساسية عند $n=2$

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 \quad \text{لأن}$$

• خطوة الاستقراء نفرض صحة $n=k \geq 2$ ولتثبت صحة $n=k+1$

$$k \geq 2: (1+x)^k > 1+kx \quad \text{--- (*)}$$

$$(1+x)^{k+1} \stackrel{?}{>} 1+(k+1)x$$

$$(1+x) > 0 \quad \text{و} \quad (1+x) > -1 \quad \text{لأن} \quad (1+x) \text{ موجب فرمنا} \quad x > -1$$

$$(1+x)^k (1+x) > (1+kx)(1+x)$$

$$(1+x)^{k+1} > 1+x+kx+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x$$

لأن $k \geq 2$ و x^2 موجب فإن kx^2 موجب

$$\Rightarrow (1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$$

العينة صحيحة من أجل $n \geq 2$

$$m^n > n$$

نظيره: $m, n \in \mathbb{N}$ و $m > 1$ يكون $m^n > n$ سؤال آخر

$$x = (m-1) > 0 \quad \& \quad m > 1$$

لذلك ان $x > -1$ ونضربهم

$$(m-1) > 0 \quad \& \quad n$$

$$n(m-1) \geq n$$

$$m^n = [1 + \underbrace{(m-1)}_x]^n > 1 + n(m-1) \geq 1 + n > n$$

(2) اثبت ان: $2^n > n$; $n \geq 1$

الخطوة الاولى عند $n=1$

$$2 > 1$$

الخطوة الثانية

خطوة لا يتقار: نفرض صحة ما قبل $n=k \geq 1$

$$2^k > k \quad \text{--- (x)}$$

ونثبت صحة ما قبل $n=k+1$

$$2^{k+1} > k+1$$

نضرب (x) بـ 2

$$2^{k+1} > 2k = k+k > k+1 \Rightarrow 2^{k+1} > k+1$$

(3) اثبت ان $2^n > n^2$ و $n \geq 5$

$$k^2 \geq 3k = 2k+k > 2k+1$$

(4) سؤال آخر:

تكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ حيث

$$a_0=1, a_1=2, a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}$$

$$1, 2, 4(2-1), 4(4-2), \dots \quad \forall n \geq 2$$

موزاييك

$$\forall n \geq 0 \quad a_n = 2^n \quad \text{خاصیت اولی}$$

$$\begin{cases} 2^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1 \\ 2^1 = 2 \Rightarrow a_1 = 2 \end{cases}$$

الگوریتم، لایه‌های مکرر و $n=1$ و $n=0$ نقطه، لا استقراری.

برهان آنها صحیح است و $0 \leq m \leq k$ و نسبت a_{k+1} است.

$$\forall m \geq 0 \quad 0 \leq m \leq k \quad a_m = 2^m$$

$$a_{k+1} = 2^{k+1}$$

$$a_{k+1} = 4a_k - 4a_{k-1} = 4(2^k) - 4(2^{k-1})$$

$$= 2^{k+2} - 2^{k+1} = 2^{k+1}(2-1) = 2^{k+1}$$

ثابت است $n > 1$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq a \cdot b \quad \text{و} \quad \forall a, b > 0 \quad \text{ثابت است}$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(a+b)^2 - 2ab \geq 2ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

این یک قضیه است و ثابت شده است.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

عرّفين:

« قابلية الضيق في \mathbb{Z} »

تعريف:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

قضایای دینی، هندسی، و جبری

• قابلية القسمة في \mathbb{Z} وتطبيقاتها •

تعريف: يمكن $a, b \in \mathbb{Z}$ نقول ان a قسم b ونكتب a/b اذا وفقط يوجد صحيح آخر c بحيث ان

$$\exists c \in \mathbb{Z}, ac = b$$

ويقال ان b مضاعف لـ a

واذا لم يوجد مثل العدد c الذي يحقق الشرط السابق فنقول ان a لا يقسم b او b ليس مضاعف لـ a .

مثال $3/15$ 8 $3 \cdot 5 = 15$

بعض الخواص العامة:

[1] - ان a قسم أي عدد صحيح والعدد 0 مضاعف لأي عدد صحيح.

[2] - اذا كان a يقسم b فانه a - يقسم b .

[3] - كل عدد يقسم نفسه.

[4] - اذا كان a يقسم b فانه a يقسم $k \cdot b$.

$$a|b \Rightarrow a|k \cdot b \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

[5] - اذا كان a يقسم b و b يقسم d فانه a يقسم d .

[6] - اذا قسم عددا عددين معينين فانه يقسم أي تركيبة لهما بأعداد صحيحة

$$a|b, a|d \Rightarrow a|(cx+dy) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

[7] - يمكن تعميم هذه الخاصية.

[8] - اذا قسم a يقسم c و $c \neq 0$

$$a|c \Rightarrow |a| \leq |c|$$

[9] - اذا كان a يقسم c و c يقسم a

$$a|c, c|a \Leftrightarrow |a| = |c|$$

نتیجه: آن مجموعه القواسم خصوصی لای عدد صحیح هر صفری مجموعه خصوصی
 ذات هیچ قسم لقواسم کلا افسر اوساوی من ایتیه اصطفا ۱۸۱ و با سالی صفا
 خصوصی.

البرهنة: لا سامة في ان (مبرهنة اقليدس) ؟
 اذا كان a و b عددين طبيعت و $a \neq 0$ صواب عدد a و b صفا و صفا
 $b = q \cdot a + r$ و $0 \leq r < |a|$ **نتیجه**

مثال ۱:
 $b=20$; $a=3$
 $20 = 3 \cdot 6 + 2$; $r=2$
 $-20 = (-7)(3) + 1$; $r=1$
 $20 = (-6)(-3) + 2$; $r=2$
 $-20 = (7)(-3) + 1$

مثال ۲ : $b=0$, $a=-6$
 $0 = (0)(-6) + 0$, $r=0$
 مثال ۳ : $b=-3$; $a=79$
 $-3 = (-1)(79) + (76)$

تطبیق:
 اثبات آن انی عدد فردی صعب لکته کی الصورة :
 $a = 4q + 1$ or $4q + 3$
 (دای فردی باطنی قسمته کی ۴ اما ۱ او ۳)
اگلا: با راضی قسمته انی عدد صعب افسر

$Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$
 انی عدد صعب a لکته کی ایتیه الصورة الآتیه
 $a=4q$ لسی فرداً
 $a=4q+1$ $a=4q+3$
 $a=4q+2$ لسی فرداً

أي إذا كان a فردياً فإنه على الصورة

$$a = 4q + 1$$

ياحي مئة من 4 في 1

$$a = 4q + 3$$

ياحي مئة من 4 في 3

سؤال أصعب

البيان مربع أي عدد زوجي يزيد العدد 1 عن مضاعف للعدد 8

(ياحي مئة مربع أي عدد زوجي من 8 ياوي 1)

أي إذا كان a زوجياً فإنه

$$a^2 = 8m + 1$$

عالم a زوجي فله إحدى الصورتين

i --- $a = 4q + 1$

ii --- $a = 4q + 3$

(i): $a^2 = (4q + 1)^2 = 16q^2 + 8q + 1$

$$= 8 \underbrace{[2q^2 + q]}_{\in \mathbb{Z}} + 1 = 8M_1 + 1$$

حيث $M_1 = 2q^2 + q \in \mathbb{Z}$

علاقة مماثلة

(ii): $a^2 = 16q^2 + 24q + 9$

$$= (16q^2 + 24q + 8) + 1$$

$$= 8(2q^2 + 3q + 1) + 1$$

2b

ان ياحي مئة أي زوجي من 2 ياوي 1 أي ان

$$a = 2q + 1$$

إذا كان a زوجياً فإنه

$$a^2 = 4q^2 + 4q + 1$$

لذلك بتسوية

$$= 4q(q + 1) + 1$$

$$q(q + 1) = 2n$$

جاء أي عدد زوجي فينا بين هو عدد زوجي

$$a^2 = 8n + 1$$

نريد ان نثبت ان العدد 6 يقسم $(5m^3 + 7m)$
اي
بطريقة الاستقراء البرية.

$$6 \mid (5m^3 + 7m)$$